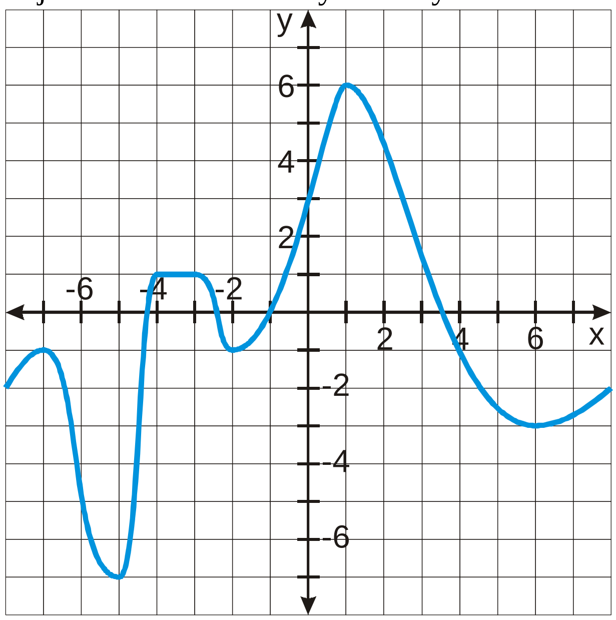
10.2.11 Průběh funkce II (hledání extrémů)

Předpoklady: 10210

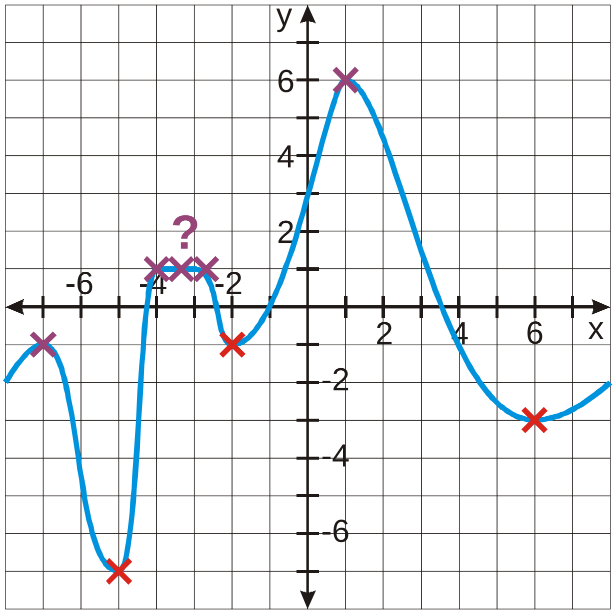
Pedagogická poznámka: Poslední příklad v běžné vyučovací hodině nestíháme. Rychlost postupu je možné značně ovlivnit tím, kolik času dáte studentům na výzkumné příklady, nebo jestli je jako příklady úplně přeskočíte a rovnou jim ukážete řešení. Největším problém v této hodině není v žádném případě derivování, ale řešení rovnic a nerovnic (už je to příliš dávno, kdy jsme je probírali).

Extrém = výjimečná hodnota
- maximum = největší hodnota na nějaké množině
- minimum = nejmenší hodnota na nějaké množině

Př. 1: Najdi na obrázku všechny extrémy nakreslené funkce



Na obrázku je několik extrémů: minima jsou značena červeným křížkem, maxima fialovým.



Nejasná je situace pro $x \in \langle -4; -3 \rangle$. Je tam nekonečně mnoho hodnot, které jsou stejně velké a větší než hodnoty okolo.

Nezbývá než si definicí ujasnit, co je vlastně extrém:

Funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, existuje-li takové okolí $\mathbf{U}_\delta(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna x z $\mathbf{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$ platí $f(x) \le f(x_0)$.
Funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, existuje-li takové okolí $\mathbf{U}_\delta(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna x z $\mathbf{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$ platí $f(x) \ge f(x_0)$.

$\Rightarrow$ funkce z obrázku má maximum ve všech bodech intervalu $\langle -4; -3 \rangle$

Existuje typ extrémů, do kterého body vyznačené křížky s otazníkem nepatří.

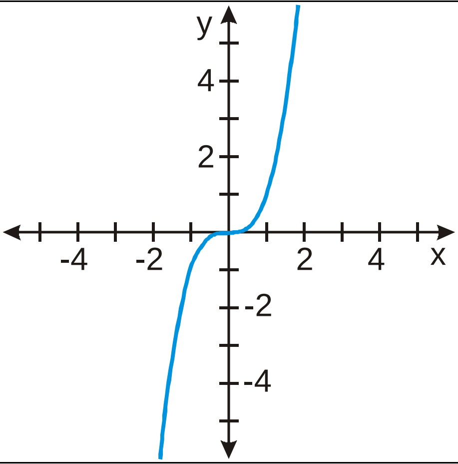
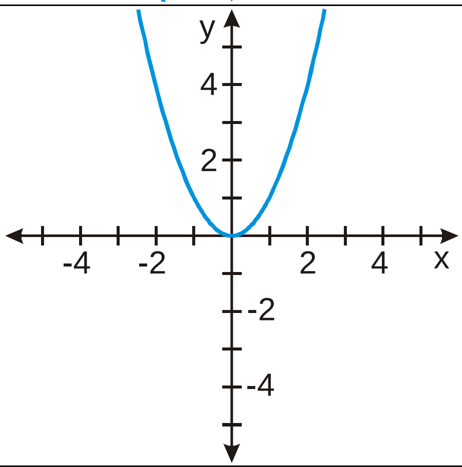
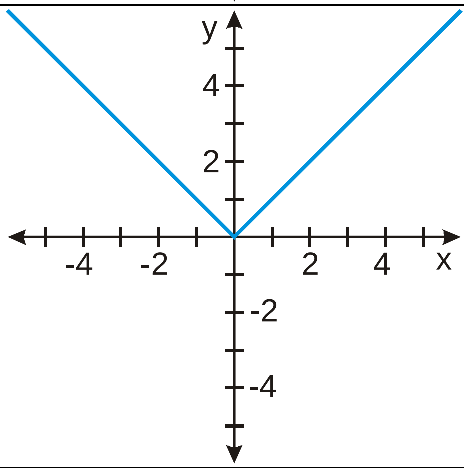
Maxima v bodě x_0, pro která nastává rovnost $f(x) = f(x_0)$ pouze pro $x = x_0$ se nazývají **ostrá maxima**.
Minima v bodě x_0, pro která nastává rovnost $f(x) = f(x_0)$ pouze pro $x = x_0$ se nazývají **ostrá minima**.

Všechna minima (i maxima) na obrázku nejsou stejně minimální:
- hodnoty některých jsou menší než hodnoty funkce v jejich okolí $\Rightarrow$ **lokální minima**
- hodnota minima v bodě $x = -5$ je nejmenší hodnotou funkce v zobrazeném intervalu $\Rightarrow$ **globální minimum** (je samozřejmě také lokální)

Jak extrémy najdeme, když nevidíme graf funkce?
- pokud má mít funkce v bodě x_0 extrém, nemůže v tomto bodě ani růst (pak by hodnoty napravo byly větší a nalevo menší) ani klesat (pak by hodnoty vpravo byly menší a nalevo větší) $\Rightarrow$ derivace musí být nulová $f'(x_0) = 0$

- když si představíme tečny grafu funkce v jednotlivých bodech, vidíme, že tečny v extrémech jsou vždy vodorovné $\Rightarrow$ derivace musí být nulová $f'(x_0)=0$

Př. 2: Prozkoumej extrémy funkcí $y=x^2$, $y=x^3$, $y=|x|$ a rozhodni, jak souvisí nulová hodnota derivace s existencí extrému.

	Funkce $y=x^3$ nemá extrém $y'=3x^2$, derivace je nulová v bodě $x_0=0$ $\Rightarrow$ funkce můžem mít body s nulovou derivací, ve kterých není extrém
	Funkce $y=x^2$ má v bodě $x_0=0$ minimum $y'=2x$, derivace je nulová v bodě $x_0=0$ $\Rightarrow$ pokud funkce extrém má je v něm nulová derivace
	Funkce $y=\|x\|$ má minimum v bodě $x_0=0$ derivace v bodě $x_0=0$ neexistuje $\Rightarrow$ funkce můžem mít extrém v bodech, ve kterých neexistuje derivace

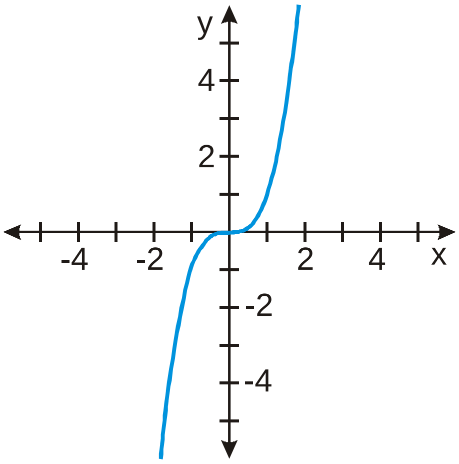
pokud derivace v bodě x_0 existuje a v bodě je extrém, musí být derivace nulová . Obráceně to neplatí, z nulové hodnoty derivace nevyplývá existence extrému

Naše objevy shrnuje věta:

Má-li funkce *f* v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí $f'(x_0)=0$.

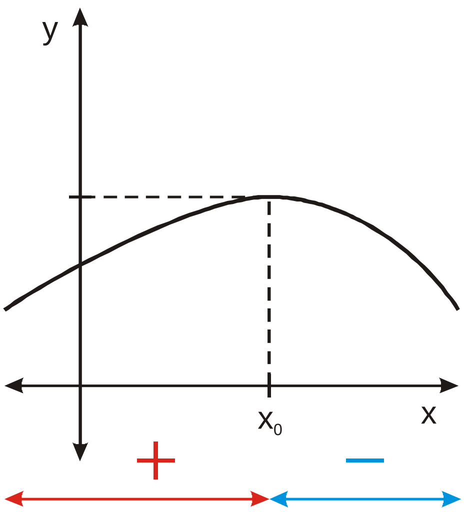
Body, pro které platí $f'(x_0)=0$ se nazývají **stacionární body**. Extrém v nich být může, ale nemusí.

Co musíme přidat k podmínce nulové hodnoty derivace, abychom měli jistotu, že je v bodě extrém? Proč není v bodě $x_0=0$ u funkce $y=x^3$ extrém?

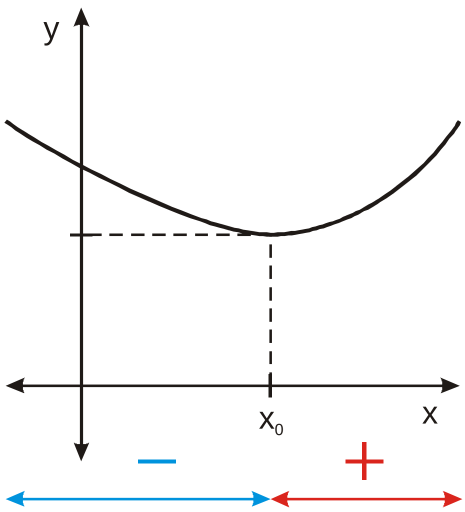


Funkce po celou dobu roste. V bodě $x_0=0$ jen na chvilku „zastaví“, derivace na obou stranách rovnosti je kladná.
$\Rightarrow$ Pokud má v bodě x_0 existovat extrém musí v tomto bodě první derivace změnit znaménko.

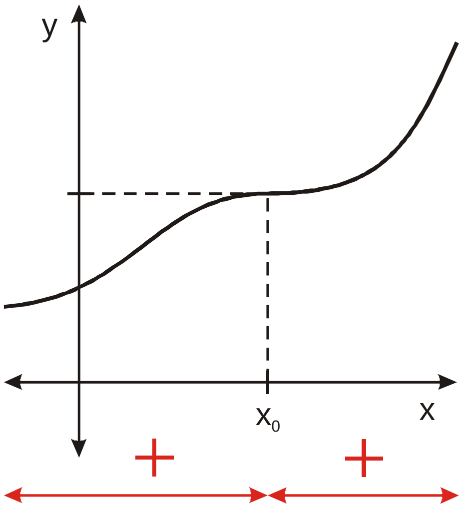
Př. 3: Nakresli obrázky funkcí, které mají v bodě x_0 nulovou derivací a mají (nemají) v tomto bodě extrém. Ověř platnost předchozí úvahy a rozhodni zda je možné ze znamének derivace vyčíst, že zda půjde o maximum nebo minimum.



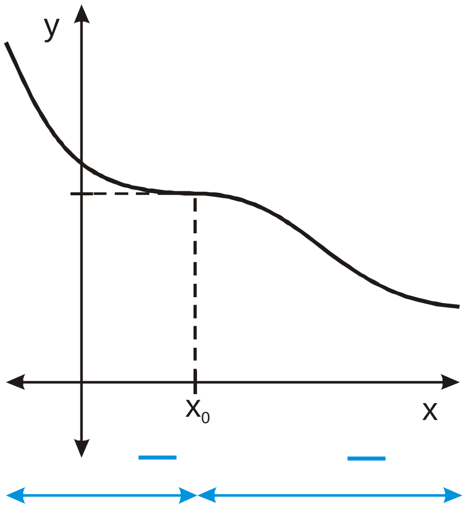
V bodě x_0 má funkce **maximum**
derivace v bodě x_0 změnila znaménko z + na - (funkce se z rostoucí změnila na klesající)



V bodě x_0 má funkce **minimum**
derivace v bodě x_0 změnila znaménko z – na + (funkce se z klesající změnila na rostoucí)



V bodě x_0 funkce **nemá extrém**
derivace v bodě x_0 nezměnila znaménko je stále kladná (funkce je stále rostoucí)

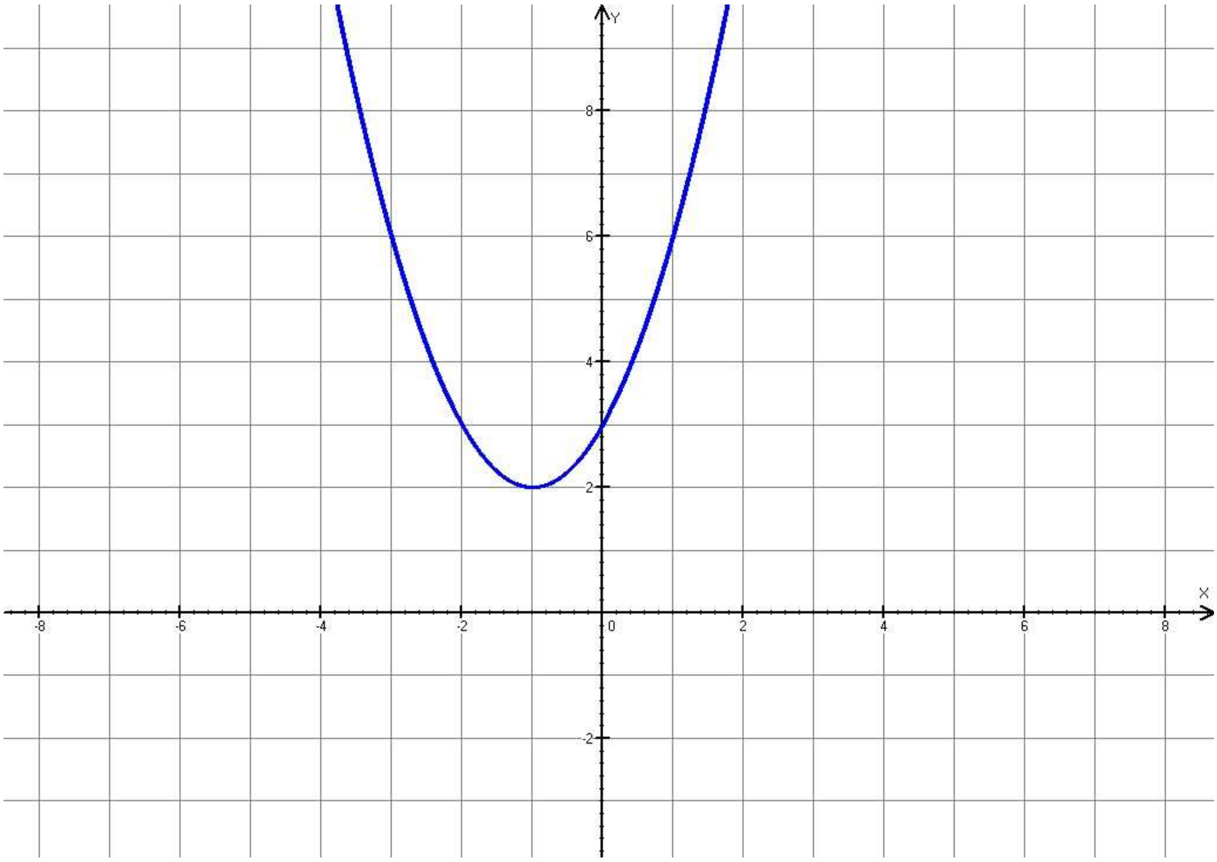


V bodě x_0 funkce **nemá extrém**
derivace v bodě x_0 nezměnila znaménko je stále záporná (funkce je stále klesající)

Náš odhad byl správný:
Nechť $f'(x_0)=0$. Jestliže existuje takové okolí $\mathbf{U}_\delta(x_0)$, že v intervalech $(x_0-\delta;x_0)$ a $(x_0;x_0+\delta)$ má $f'(x)$ různá znaménka, má funkce *f* v bodě x_0 ostrý lokální extrém. Mění-li se znaménko derivace z plus na minus, má funkce v bodě x_0 lokální maximum, mění-li se znaménko derivace z minus na plus, má funkce v bodě x_0 lokální minimum.

Př. 4: Najdi lokální extrémy funkce $y=x^2+2x+3$.

Zderivujeme funkci: $y'=\left(x^2+2x+3\right)'=2x+2$
Hledáme stacionární body: $y'=2x+2=0 \Rightarrow x=-1$
$\Rightarrow$ v bodě $x=-1$ může mít funkce $y=x^2+2x+3$ extrém
mění se v bodě $x=-1$ znaménko derivace?
$x<-1 \Rightarrow y'=2x+2<0$ $\qquad$ $x>-1 \Rightarrow y'=2x+2>0$
$\Rightarrow$ funkce $y=x^2+2x+3$ se v bodě $x=-1$ mění z klesající na rostoucí $\Rightarrow$ má v bodě $x=-1$ lokální ostré minimum
výsledek si ověříme grafem



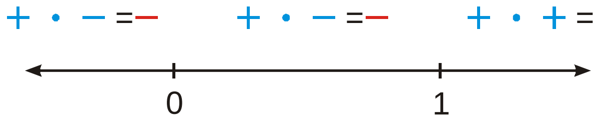
Př. 5: Najdi lokální extrémy funkce $y = 3x^4 - 4x^3$.

Zderivujeme funkci: $y' = \left(3x^4 - 4x^3\right)' = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 12x^3 - 12x^2$

Hledáme stacionární body: $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2\left(x-1\right) = 0$

$\Rightarrow$ dva stacionární body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $\Rightarrow$ zkoumáme znaménko derivace:

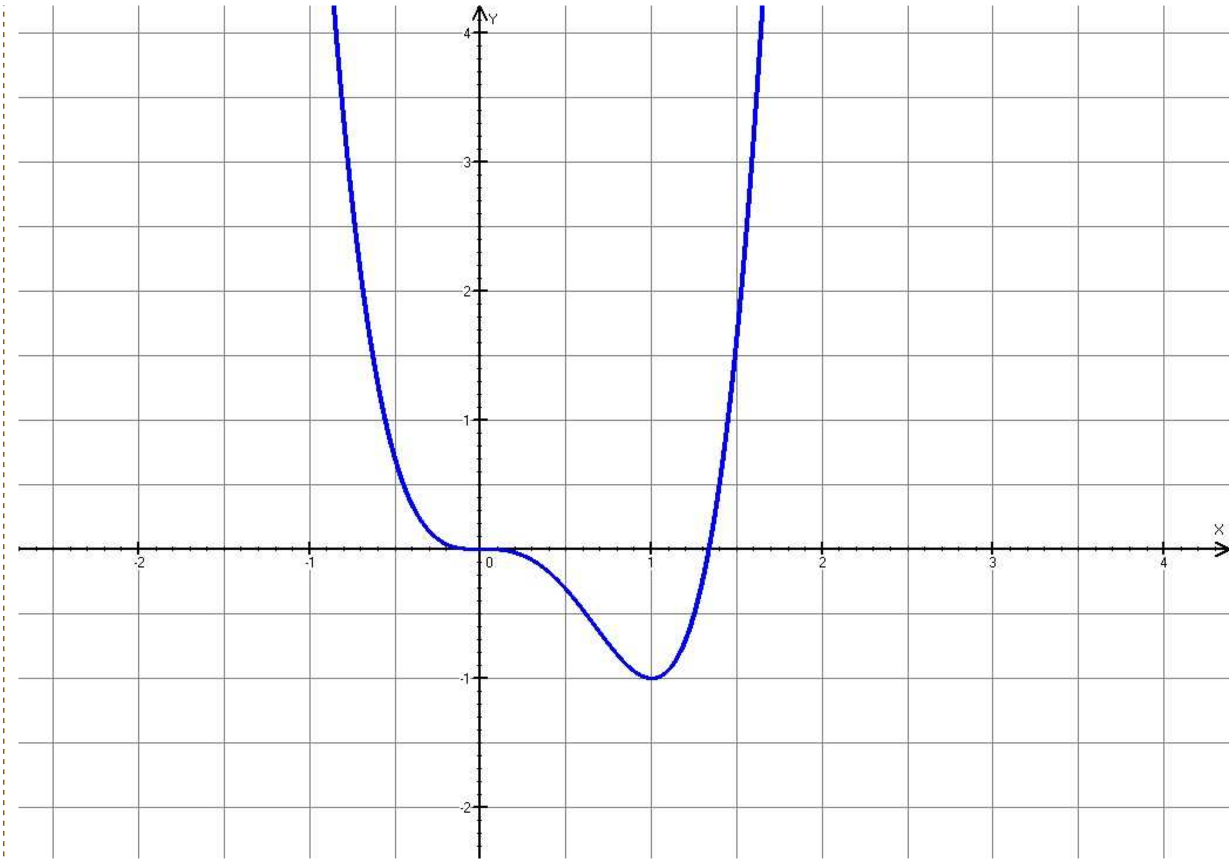
nerovnice: $12\,x^2\left(x-1\right) > 0$



v bodě $x_1 = 0$ se znaménko derivace nemění $\Rightarrow$ není tam extrém

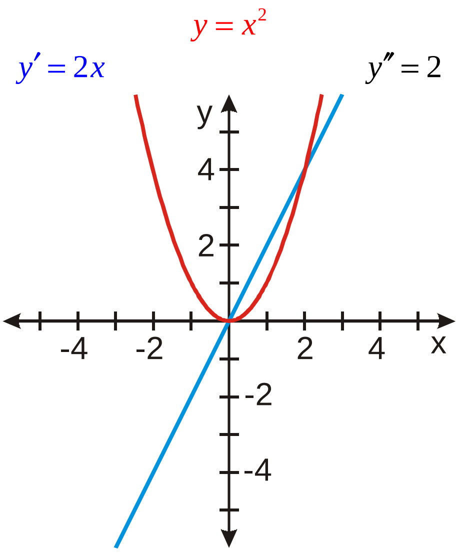
v bodě $x_2 = 1$ se znaménko derivace mění $\Rightarrow$ je tam extrém (minimum)

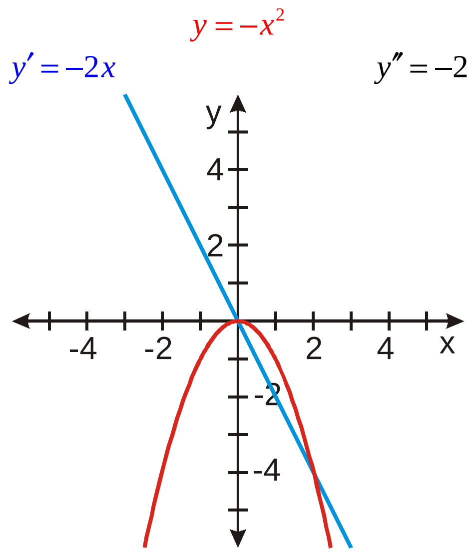
Opět zkontrolujeme výsledek pohledem na graf:



Řešení nerovnic kvůli odhalování extrémů není příliš pohodlné.
Nápad: Extrémy se nacházejí ve stacionárních bodech, ve kterých se mění znaménko první derivace $\Rightarrow$ mění se tam hodnota první derivace, ale změnu hodnoty první derivace popisuje druhá derivace $\Rightarrow$ možná bychom mohli rozhodnout o existenci extrémů i pomocí druhé derivace

Př. 6: Nakresli vedle sebe obrázky funkcí $y = x^2$ a $y = -x^2$. Do každého obrázku dokresli graf jejich první derivace, spočti jejich druhé derivace a rozhodni, zda mají extrémy. Zhodnoť situaci.





Funkce má v bodě $x_0 = 0$ ostré minimum, její derivace v bodě $x_0 = 0$ mění znaménko z minus na plus, o čemž vypovídá i kladná hodnota druhé derivace

Funkce má v bodě $x_0 = 0$ ostré maximum, její derivace v bodě $x_0 = 0$ mění znaménko z plus na minus, o čemž vypovídá i záporná hodnota druhé derivace

Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje v bodě x_0 druhá derivace.

- Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce *f* v bodě x_0 ostré maximum
- je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce *f* v bodě x_0 ostré minimum
- je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout

Př. 7: Použij pravidlo pro určování extrému pomocí druhé derivace u příkladů 4 a 5.

Zderivujeme funkci: $y' = (x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$

Hledáme stacionární body: $y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\Rightarrow$ v bodě $x = -1$ může mít funkce $y = x^2 + 2x + 3$ extrém

druhá derivace: $y'' = (2x + 2)' = 2$

hodnota druhé derivace je v bodě $x = -1$ kladná $\Rightarrow$ má v bodě $x = -1$ lokální ostré minimum

Zderivujeme funkci: $y' = (3x^4 - 4x^3)' = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 12x^3 - 12x^2$

Hledáme stacionární body: $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2 (x - 1) = 0$

$\Rightarrow$ dva stacionární body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

druhá derivace: $y'' = (12x^3 - 12x^2)' = 36x^2 - 24x$

- hodnota druhé derivace v $x_1 = 0$: $y'' = 36x^2 - 24x = 36 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ tady nám druhá derivace nepomohla, opět bychom se museli vrátit k řešení nerovnice
- hodnota druhé derivace v $x_2 = 1$: $y'' = 36x^2 - 24x = 36 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 = 12 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_2 = 1$ lokální ostré minimum

Př. 8: Najdi lokální extrém funkce $y = x^3 - 3x$.

Zderivujeme funkci: $y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

Hledáme stacionární body: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) = 0$

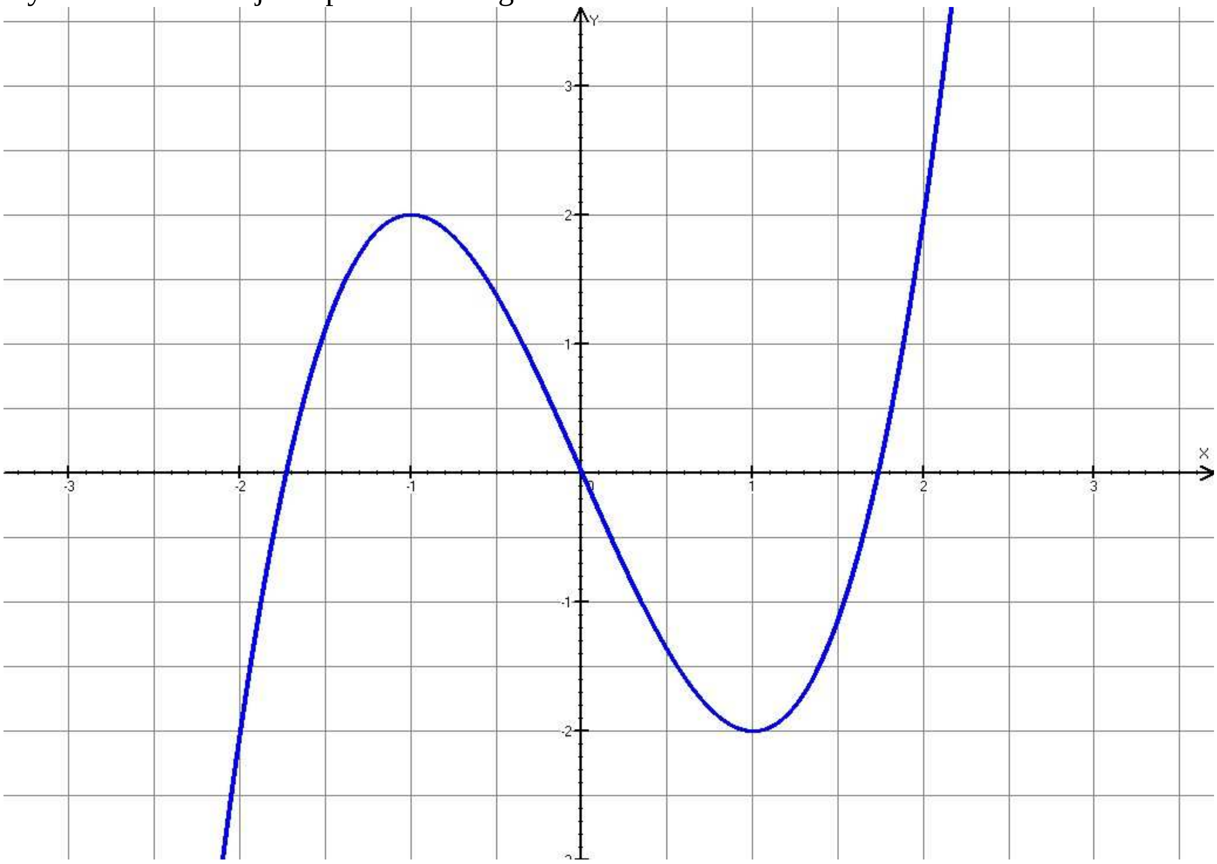
$\Rightarrow$ dva stacionární body $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

druhá derivace: $y'' = (3x^2 - 3)' = 6x$

- hodnota druhé derivace v $x_1 = -1$: $y'' = 6x = 6(-1) = -6 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_1 = -1$ lokální ostré maximum

- hodnota druhé derivace v $x_2 = 1$: $y'' = 6x = 6 \cdot 1 = 6 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_2 = 1$ lokální ostré minimum

Výsledek zkontrolujeme pohledem na graf:



Př. 9: Najdi globální extrémy funkce $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ v intervalu $\langle -3; 3 \rangle$.

Postupujeme stejně jako v předchozích příkladech. Kromě nalezených extrémů musíme spočítat i hodnoty v krajních bodech:

$f(-3) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 12(-3) + 8 = -37$

$f(3) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 8 = -1$

Zderivujeme funkci: $y' = \left(2x^3 - 3x^2 - 12x + 8\right)' = 6x^2 - 6x - 12$

Hledáme stacionární body: $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right) = 6(x-2)(x+1) = 0$

$\Rightarrow$ dva stacionární body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

druhá derivace: $y'' = \left(6x^2 - 6x - 12\right)' = 12x - 6$

- hodnota druhé derivace v $x_1 = -1$: $y'' = 12x - 6 = 12(-1) - 6 = -18 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_1 = -1$ lokální ostré maximum

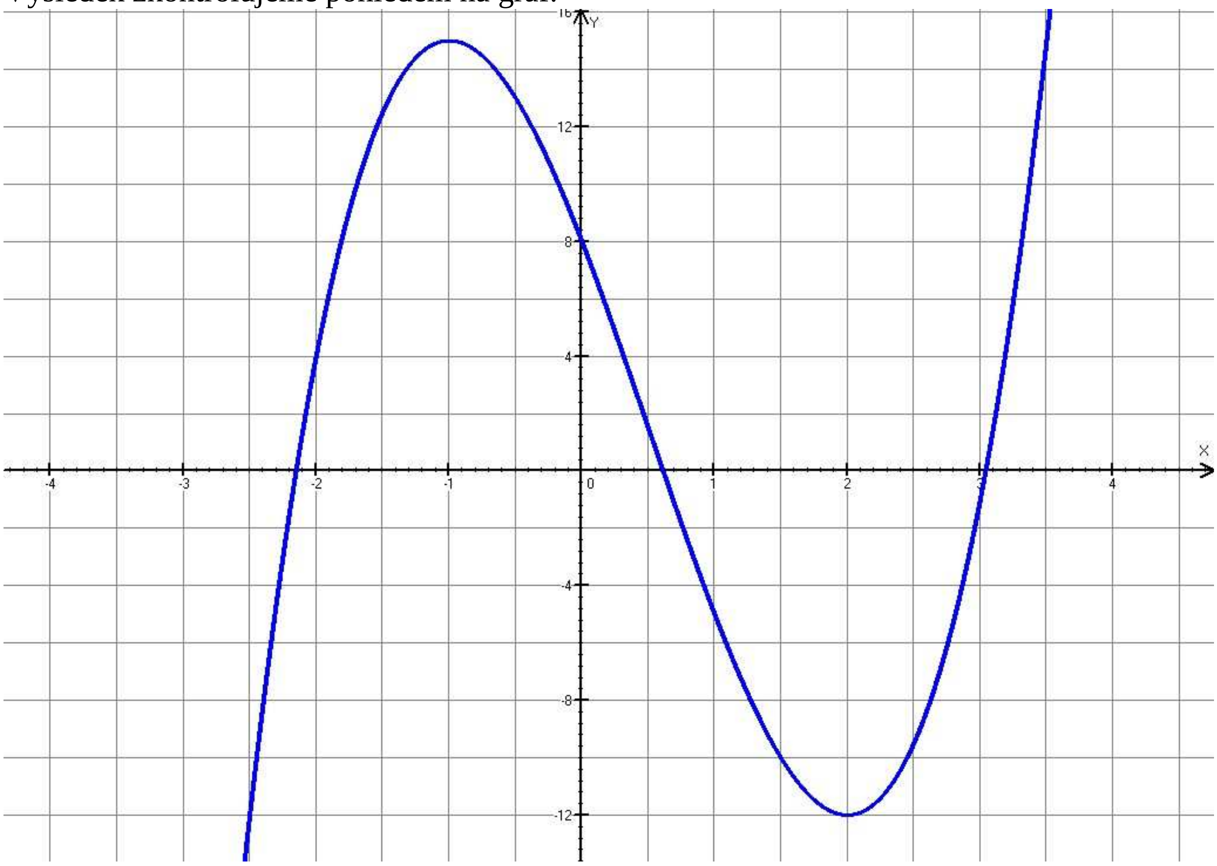
  hodnota: $f(-1) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 8 = 15$
- hodnota druhé derivace v $x_2 = 2$: $y'' = 12x - 6 = 12 \cdot 2 - 6 = 18 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_2 = 2$ lokální ostré minimum

  hodnota: $f(2) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -12$

po porovnání hodnot vidíme, že funkce $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ má v intervalu $\langle -3; 3 \rangle$:

- globální maximum v bodě $x_1 = -1$ s hodnotou 15
- globální minimum v bodě $x_3 = -3$ s hodnotou -37

Výsledek zkontrolujeme pohledem na graf:



Př. 10: Petáková:

strana 158/cvičení 44 f_3, f_6

strana 158/cvičení 45 g_1, g_4

strana 158/cvičení 46 h_1

strana 158/cvičení 47

Shrnutí: